معادلة فريدهولم المتجانسة

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, g(t)\, dt \quad (1)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow f_i = 0$$

$$g(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\, a_i(x)$$

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, c_j = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

نفرض أن λ ليست قيمة خاصة $D(\lambda) \neq 0$ للمعادلة (1) لا تملك سوى الحل الصفري $g(x) = 0$ أما في حالة λ قيمة خاصة عندئذ المعادلة (1) المتجانسة تملك حلول مختلفة عن الصفر (عدد لا نهائي من الحلول)

ملاحظة مهمة

في أحد القيم الخاصة $\lambda = \lambda_1$ حل المعادلة المتجانسة يعطى بالدستور

$$g_1(x) = \lambda_1 c_1 a_1(x) + \lambda_1 c_2 a_2(x) + \dots + \lambda_1 c_n a_n(x)$$

ومن ثم التوابع الخاصة الموافقة للقيمة الخاصة هي

$$g_1^{(1)}(x) = \lambda_1 a_1(x),\quad g_1^{(2)}(x) = \lambda_1 a_2(x),\quad \dots,\quad g_1^{(n)}(x) = \lambda_1 a_n(x)$$

ملاحظة مهمة

منقول المعادلة المتجانسة هو عبارة عن

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(t,x)\, \psi(t)\, dt$$

$$\psi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\, b_i(x)$$

علماً أن c_i ثوابت تحدد من الدستور

$$\boxed{\lambda \sum \alpha_{ki}\, c_k = c_i}$$

نظرية فريدهولم

إذا كان لدينا المعادلة التكاملية

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, g(t)\, dt$$

عندئذ نميز حالتين

الحالة الأولى: λ ليست قيمة خاصة للنواة $K(x,t)$ أي $D(\lambda) \neq 0$ عندئذ تكون للمعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة للمعادلة المعطاة وحسب الحل الصفري وتكون للمعادلة المعطاة الأصلية حل وحيد

الحالة الثانية: λ قيمة خاصة أي $D(\lambda) = 0$ عندئذ تكون للمعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة المعطاة حلول غير الحل الصفري (عدد لانهائي من الحلول) هذه الحلول تشكل فضاء ذات بعد منتهي كما تكون للمعادلة المتجانسة كذلك حلول غير الحل الصفري تشكل فضاء له البعد نفسه

إذا كانت $g^{(1)}(x), g^{(2)}(x), \dots, g^{(n)}(x)$ قاعدة لمجموعة الحلول الأولى والمجموعة $\psi^{(1)}(x), \psi^{(2)}(x), \dots, \psi^{(n)}(x)$ قاعدة لمجموعة الحلول الثانية

عندئذ يلزم ويكفي حتى تكون المعادلة التكاملية المعطاة (الغير متجانسة) حل هو أن تتحقق الشروط الآتية

$$\int_a^b \psi^{(i)}(x)\, f(t)\, dt = 0$$

ويكون الحل العام هو مجموع حل خاص مع حل مضاف إلى تركيب خطي ويكون الحل العام من الدوال $g^{(i)}(x)$ وعندما لا تتحقق العلاقة فالمعادلة المعطاة لا تملك أي حل

مثال: أوجد حل المعادلة التكاملية

$$g(x) = e^{2x} + \lambda \int_0^1 e^{x-t}\, g(t)\, dt \quad (1)$$

سبق وحصلنا على نفس المعادلة في مثال سابق وكان

$$g(x) = e^{2x} + \frac{\lambda e^{x}(e-1)}{1-\lambda}$$

$|\lambda| < 1$

الحل:

$K(x,t) = e^{x-t} = e^{x} \cdot e^{-t}$

$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\, a_i(x)$

$a_1(x) = e^{x} \qquad b_1(t) = e^{-t}$

$g(x) = e^{2x} + \lambda c_1 e^{x} \quad (2)$

$f_i + \lambda \sum_{j=1} \alpha_{ij}\, c_j = c_i$

$f_1 + \lambda \alpha_{11} c_1 = c_1 \quad (3)$

$f_1 = \int_a^b b_1(t)\, f(t)\, dt$

$\alpha_{ij} = \int_a^b b_i(t)\, a_j(t)\, dt$

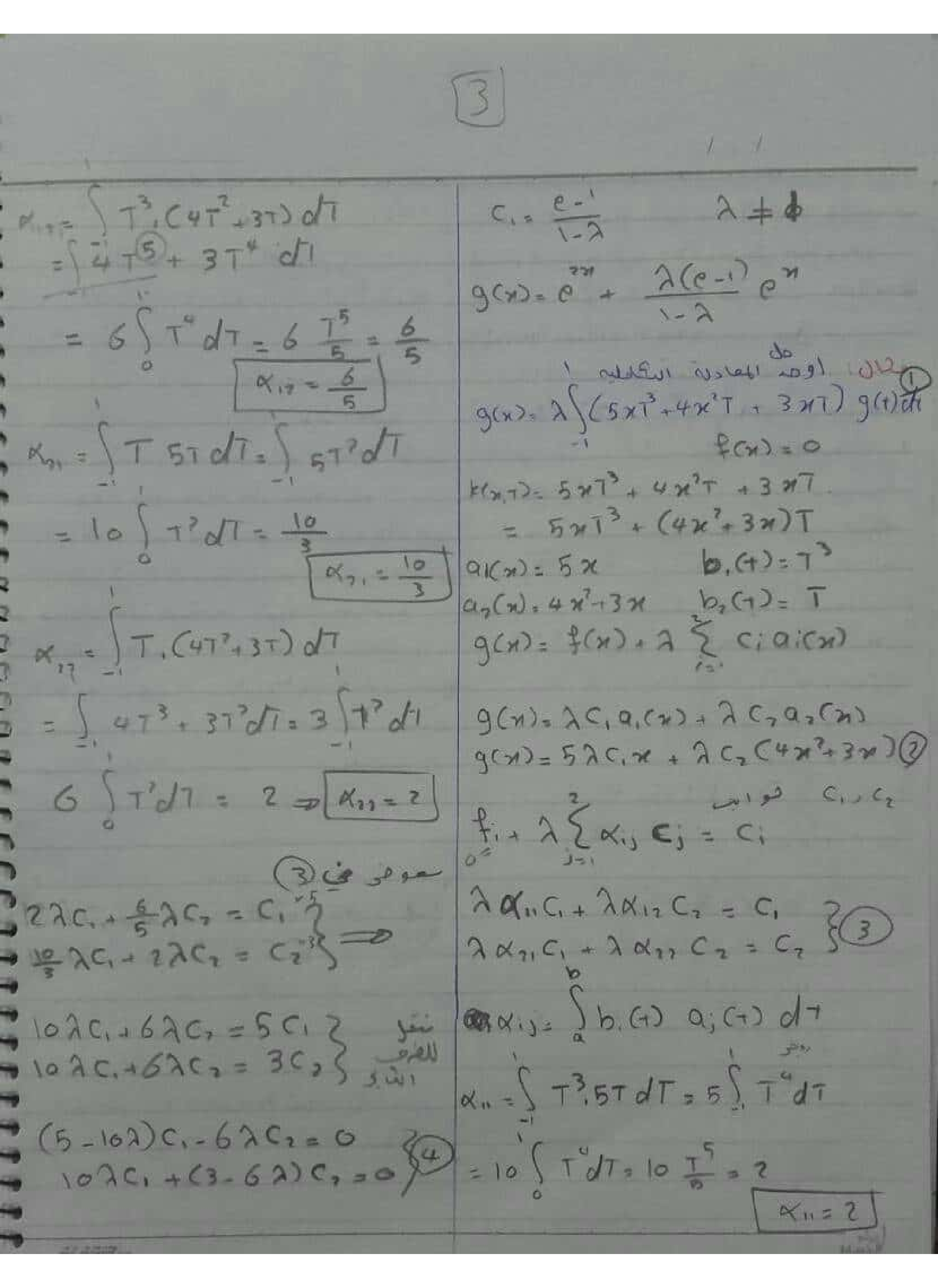
$f_1 = \int_0^1 e^{-t} \cdot e^{2t}\, dt = \int_0^1 e^{t}\, dt = e - 1$ $\quad \boxed{f_1 = e-1}$

$\alpha_{11} = \int_0^1 e^{-t} \cdot e^{t}\, dt = 1$ $\quad \boxed{\alpha_{11} = 1}$

نعوض في (3)

$e - 1 + \lambda c_1 = c_1$

$(1-\lambda)\, c_1 = e - 1$



/ /

$$\alpha_{12} = \int_{-1}^{1} T^3 .(4T^2 + 3T)\, dT$$

$$= \int_{-1}^{1} 4T^5 + 3T^4 \, dT$$

$$= 6\int_{0}^{1} T^4 \, dT = 6\,\frac{T^5}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\boxed{\alpha_{12} = \frac{6}{5}}$$

$$\alpha_{21} = \int_{-1}^{1} T\, 5T \, dT = \int_{-1}^{1} 5T^2 \, dT$$

$$= 10\int_{0}^{1} T^2 \, dT = \frac{10}{3}$$

$$\boxed{\alpha_{21} = \frac{10}{3}}$$

$$\alpha_{22} = \int_{-1}^{1} T .(4T^2 + 3T)\, dT$$

$$= \int_{-1}^{1} 4T^3 + 3T^2 \, dT = 3\int_{-1}^{1} T^2 \, dT$$

$$6\int_{0}^{1} T^2 \, dT = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha_{22} = 2}$$

نعوض في (3)

$$2\lambda C_1 + \frac{6}{5}\lambda C_2 = C_1 \quad \times 5$$
$$\frac{10}{3}\lambda C_1 + 2\lambda C_2 = C_2 \quad \times 3 \quad \Rightarrow$$

$$10\lambda C_1 + 6\lambda C_2 = 5C_1$$
$$10\lambda C_1 + 6\lambda C_2 = 3C_2$$

ننقل للطرف الثاني

$$(5 - 10\lambda)C_1 - 6\lambda C_2 = 0$$
$$10\lambda C_1 + (3 - 6\lambda)C_2 = 0 \quad (4)$$

$$C_1 = \frac{e-1}{1-\lambda} \qquad \lambda \neq 1$$

$$g(x) = e^{2x} + \frac{\lambda(e-1)}{1-\lambda} e^{x}$$

(1) مثال: أوجد حل المعادلة التكاملية

$$g(x) = \lambda\int_{-1}^{1} (5xT^3 + 4x^2T + 3xT)\, g(t)\, dt$$

$$f(x) = 0$$

$$k(x,T) = 5xT^3 + 4x^2T + 3xT$$
$$= 5xT^3 + (4x^2 + 3x)T$$

$a_1(x) = 5x \qquad b_1(t) = T^3$

$a_2(x) = 4x^2 + 3x \qquad b_2(t) = T$

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{2} C_i\, a_i(x)$$

$$g(x) = \lambda C_1 a_1(x) + \lambda C_2 a_2(x)$$
$$g(x) = 5\lambda C_1 x + \lambda C_2 (4x^2 + 3x) \quad (2)$$

C_1, C_2 ثوابت

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} C_j = C_i \qquad (f_i = 0)$$

$$\lambda \alpha_{11} C_1 + \lambda \alpha_{12} C_2 = C_1$$
$$\lambda \alpha_{21} C_1 + \lambda \alpha_{22} C_2 = C_2 \quad (3)$$

$$\alpha_{ij} = \int_{a}^{b} b_i(t)\, a_j(t)\, dt$$

$$\alpha_{11} = \int_{-1}^{1} T^3 . 5T \, dT = 5\int_{-1}^{1} T^4 \, dT$$

$$= 10\int_{0}^{1} T^4 \, dT = 10\,\frac{T^5}{5} = 2$$

$$\boxed{\alpha_{11} = 2}$$

/ /

مثال ص ٣٥ اوجد حل المعادلة التكاملية

$$g(x) = 1 + \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x+T)\, g(T)\, dT \quad (1)$$

$k(x,T) = \cos(x,T) = \cos x \cos T - \sin x \sin T$

$a_1(x) = \cos x \qquad b_1(T) = \cos T$

$a_2(x) = -\sin x \qquad b_2(T) = \sin T$

$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{2} c_i\, a_i(x)$

$g(x) = 1 + \lambda c_1 \cos x - \lambda c_2 \sin x \quad (2)$

$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} c_j = c_i$

$$\left.\begin{aligned} f_1 + \lambda \alpha_{11} c_1 + \lambda \alpha_{12} c_2 &= c_1 \\ f_2 + \lambda \alpha_{21} c_1 + \lambda \alpha_{22} c_2 &= c_2 \end{aligned}\right\} (3)$$

$f_i = \int_a^b b_i(T)\, f(T)\, dT$

$\alpha_{ij} = \int_a^b b_i(T)\, a_j(T)\, dT$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \int_0^{2\pi} \cos T\, dT = 0 \\ f_2 &= \int_0^{2\pi} \sin T\, dT = 0 \end{aligned}\right\} f_i = 0$$

$\alpha_{11} = \pi \qquad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0 \qquad \alpha_{22} = -\pi$

بالحل عند ال

بدل في (3)

$$\left.\begin{aligned} \lambda\pi c_1 = c_1 &\Rightarrow (1 - \lambda\pi) c_1 = 0 \\ -\lambda\pi c_2 = c_2 &\Rightarrow (1 + \lambda\pi) c_2 = 0 \end{aligned}\right\} (4)$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 5 - 10\lambda & -6\lambda \\ -6\lambda & 3 - 6\lambda \end{vmatrix}$$

$= (5 - 10\lambda)(3 - 6\lambda) - (-6\lambda)(-10\lambda)$

$= 15 - 60\lambda$

$D(\lambda) = 0$

$15 - 60\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$

وهنا نعبر مالتي حسب نظرية فريدهولم

الحالة الاولى

$D(\lambda) \neq 0 \Leftarrow \lambda \neq \frac{1}{4}$

$g(x) = 0$ بالتالي

الحالة الثانية

$D(\lambda) = 0 \Leftarrow \lambda = \frac{1}{4}$

بدل منها λ في (4) نجد

$(5 - \frac{5}{2}) c_1 - \frac{3}{2} c_2 = 0$

$-\frac{5}{2} c_1 + (3 - \frac{3}{2}) c_2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} 5c_1 - 3c_2 &= 0 \\ -5c_1 + 3c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow c_1 = \frac{3}{5} c_2 \quad \forall c_2$

بالتالي المعادلة عدد لانهائي من الحلول

بدل في (2)

$g(x) = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{5} c_2 x + c_2 (x^2 + \frac{3}{4} x)$

$g(x) = (x^2 + \frac{3}{4} x + \frac{3}{4} x) c_2$

$g(x) = (x^2 + \frac{3}{2} x) c_2 \quad \forall c_2$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\pi & 0 \\ 0 & 1+\lambda\pi \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda\pi)(1+\lambda\pi)$$

$D(\lambda) = 0$

$(1-\lambda\pi)(1+\lambda\pi) = 0$

$\lambda = \pm \frac{1}{\pi}$

نميز ما يلي

الأولى $D(\lambda) \neq 0$ $\lambda \neq \pm\frac{1}{\pi}$

من نظرية فريدهولم المعادلة المعطاة تملك حل وحيد هو الحل

$C_1 = 0 \quad C_2 = 0$

نبدل في (2)

$g(x) = 1$

وهو المطلوب

الثانية نميز ما يلي

P] $\lambda = \frac{1}{\pi}$ نبدل في (4) نحصل

$0 C_1 = 0$ ، $2 C_2 = 0$ ⇐ $\forall C_1 \quad C_2 = 0$

المعادلات الجبرية قد حلت

أي أن المعادلة المعطاة تملك عدد لا نهائي من الحلول نبدل في (2)

$g(x) = 1 + \frac{1}{\pi} C_1 \cos x \quad \forall C_1$

U] $\lambda = -\frac{1}{\pi}$ نبدل في 4

$2C_1 = 0$ ، $0C_2 = 0$ ⇐ $C_1 = 0$ ، $\forall C_2$

المعادلة تملك عدد لا نهائي من الحلول

نعوض في (2) فنحصل على

$g(x) = 1 + \frac{1}{\pi} C_2 \sin x$

وهو المطلوب

طريقة ثانية

في الحالة الثانية نميز ما يلي

$\lambda = \frac{1}{\pi}$ حتى تكون للمعادلة (1) حل يجب أن يتحقق الشرط التالي

$$\int \psi(x) f(x)\, dx = 0 \quad \#$$

$\psi(x)$ حل منقول المعادلة التكاملية المتجانسة لأن النواة متناظرة هذا يعني أن حل المعادلة المتجانسة هو حل منقول المعادلة المتجانسة $\psi(x) = g(x)$ للمعادلة المتجانسة

حل المعادلة المتجانسة

المعادلات المتجانسة الموافقة لـ (4)

هي حلها في هذه الحالة

$0 C_1 = 0$ ، $2 C_2 = 0$ ⇐ $\forall C_1 \quad C_2 = 0$

نعوض في حل المعادلة المتجانسة

$g(x) = \lambda C_1 \cos x - \lambda C_2 \sin x$

$g(x) = \frac{1}{\pi} C_1 \cos x \quad \forall C_1$

بالتالي $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} C_1 \cos x$

نعوض في #

$$\frac{C_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x\, dx = 0$$

المعادلة تملك عدد لا نهائي من الحلول

نحل (4) في أجل $\lambda = \frac{1}{\pi}$ ⇐

$C_1 = 0 \quad \forall C_1$

نعوض عن ① $g(x) = 1 + \frac{1}{\pi} C_1 \cos x$

$\lambda = -\frac{1}{\pi}$ • بنفس الحل بين

الطريقة الاولى اسهل

ملاحظة

اذا كانت λ ليست قيمة خاصة

$D(\lambda) \neq 0$ وحصلنا على $f_i = 0$

عندئذ المعادلة التكاملية غير المتجانسة

تملك حل وحيد

النواة المتناظرة للمعادلات التكاملية

نقول عن النواة $K(x,T)$ انها متناظرة

اذا بدلنا كل x بـ T وكل T بـ x

ولم تتغير $K(x,T) = K(T,x)$

سندرس فيما يلي بعض الخواص المتعلقة بـ

المعادلات التكاملية ذات النواة المتناظرة

الخاصة الاولى

تكامل جداء تابعين خاصين مرافقين

لقيمتين خاصتين مختلفتين على المجال

الاساسي $[a,b]$ يساوي الصفر

البرهان

لتكن λ_1 ، λ_2 قيمتين خاصتين مختلفتين

وليكن $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ التابعين الخاصين المرافقين

لهما على الترتيب عندئذ

$$\frac{1}{\lambda_1} g_1(x) = \int_a^b K(x,T)\, g_1(T)\, dT$$

$$\frac{1}{\lambda_2} g_2(x) = \int_a^b K(x,T)\, g_2(T)\, dT$$

نضرب العلاقة الاولى بـ $g_2(x)$ والعلاقة الثانية

بـ $g_1(x)$ ونكامل بالنسبة لـ x على المجال $[a,b]$

ونطرح العلاقتين

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \int_a^b g_1(x)\, g_2(x)\, dx =$$

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(x,T)\, g_1(T)\, dT\right] g_2(x)\, dx$$

$$- \underbrace{\int_a^b \left[\int_a^b K(x,T)\, g_2(T)\, dT\right] g_1(x)\, dx}_{I}$$

نبدل في I كل x بـ T وكل T بـ x

$$I = \int_a^b \left[\int_a^b K(T,x)\, g_2(x)\, dx\right] g_1(T)\, dT$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(T,x)\, g_1(T)\, dT\right] g_2(x)\, dx$$

وبما ان النواة متناظرة نحصل على

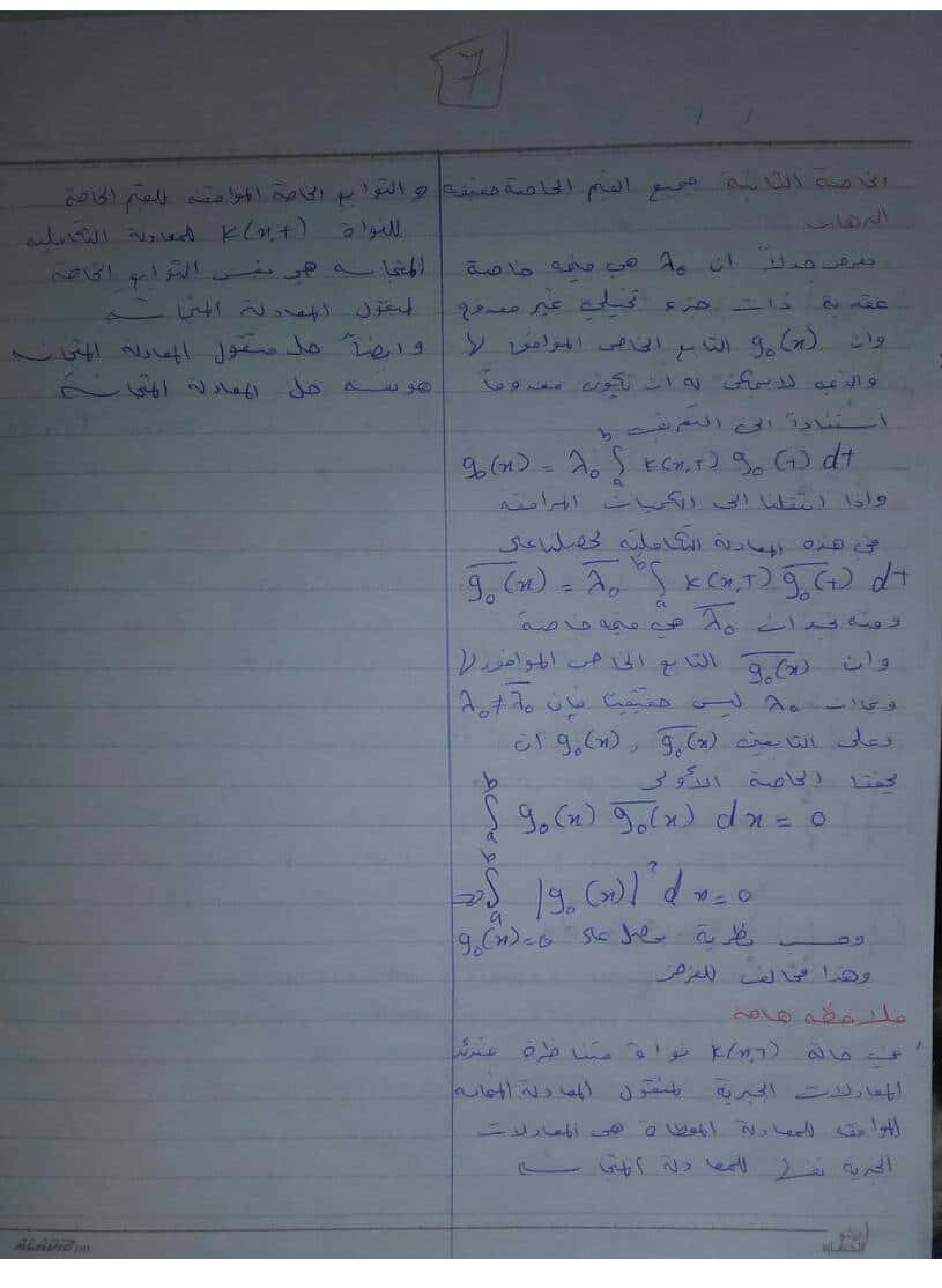
$$I = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,T)\, g_1(T)\, dT\right] g_2(x)\, dx$$

نبدل I بقيمتها نحصل على

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \int_a^b g_1(x)\, g_2(x)\, dx = 0$$

بما ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ فإن $\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \neq 0$

$$\int_a^b g_1(x)\, g_2(x) = 0$$



الخاصة الثانية: جميع القيم الخاصة حقيقية

البرهان

نفرض جدلاً ان λ_0 هي قيمة خاصة عقدية ذات جزء تخيلي غير معدوم وان $g_0(x)$ التابع الخاص الموافق لا والذي لا يمكن له ان يكون معدوماً استناداً الى التعريف

$$g_0(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x,t)\, g_0(t)\, dt$$

واذا انتقلنا الى الكميات المرافقة في هذه المعادلة التكاملية نحصل على

$$\overline{g_0(x)} = \overline{\lambda_0} \int_a^b K(x,t)\, \overline{g_0(t)}\, dt$$

ومنه نجد ان $\overline{\lambda_0}$ هي قيمة خاصة وان $\overline{g_0(x)}$ التابع الخاص الموافق لا وبما ان λ_0 ليس حقيقياً فإن $\lambda_0 \neq \overline{\lambda_0}$ وعلى التابعين $\overline{g_0(x)}$, $g_0(x)$ ان يحققا الخاصة الأولى

$$\int_a^b g_0(x)\, \overline{g_0(x)}\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b |g_0(x)|^2\, dx = 0$$

ومن نظرية نحصل على $g_0(x) = 0$ وهذا يخالف الفرض

ملاحظة هامة

في حالة $K(x,t)$ نواة متناظرة عندئذ المعادلات الجبرية بمنقول المعادلة المقابلة الموافقة للمعادلة المعطاة هي المعادلات الجبرية نفس المعادلة الأصلية

و التوابع الخاصة الموافقة للقيم الخاصة للنواة $K(x,t)$ للمعادلة التكاملية المتناظرة هي نفس التوابع الخاصة لمنقول المعادلة المتناظرة

وايضاً حل منقول المعادلة المتناظرة هو نفسه حل المعادلة المتناظرة